

Тема 2. Комбинаторика

Основными понятиями этого раздела являются различные соединения (комбинации) элементов множества, которые подразделяются на размещения, перестановки и сочетания. Соединения могут быть с повторениями и без повторений. Далее, если нет специальных оговорок, под размещениями, перестановками и сочетаниями подразумеваются эти соединения без повторений.

1.1. Размещения

Размещениями из n элементов по k элементов называются всевозможные упорядоченные подмножества по k элементов из множества различных n элементов, отличающихся друг от друга порядком или самими элементами ($n > k$). Максимальное число таких подмножеств обозначается A_n^k . Читается «число размещений из n элементов по k » или просто « A из n по k ».

Пример. Рассмотрим множество из четырех элементов a, b, c, d . Выпишем всевозможные размещения из этих четырех элементов по два найдем их число (Таблица 2.1).

ab	ac	ad
ba	bc	bd
ca	cb	cd
da	db	dc

Таблица 2.1

Очевидно, этой таблицей исчерпываются всевозможные размещения из четырех элементов по два элемента. Число строк — 4, столбцов — 3, значит, всего $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$.

Теперь найдем A_4^3 (Таблица 2.2)

abc	acd	adb	bac	bca	bad	cab	cbd	cda	dab	dca
acb	adc	abd	bca	bdc	bad	cba	cdb	cad	dca	dcb

Таблица 2.2

Технология построения таблицы такая. Сначала выписываем все размещения из Таблицы 2.1 и приписываем к каждой паре элементов еще один элемент (первая строка Таблицы 2.2). Во второй строке переставляем второй и третий элемент соединения первой строки.

Из таблицы 2.2: $A_4^3 = 12 \cdot 2 = 24$.

Аналогично можно получить, например, $A_4^2 = 7 \cdot 6$;

$A_4^1 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. Вообще,

$$A_n^k = n(n-1) \dots (n-(k-1)) \quad (2.1)$$

Правило: Число размещений из n по k равно произведению k последовательных целых чисел, из которых наибольшее есть n .

Введем обозначение $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ — произведение всех последовательных натуральных чисел от 1 до n . (Читается « n факториал»). Тогда:

$$A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)(n-k) \dots (n-1) \cdot 1}{(n-k) \dots (n-1) \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Формула:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (2.2)$$

Отметим очевидное полезное свойство факториала:

$$n! = (n-1)!n \quad (2.3)$$

Например: $5! = 4! \cdot 5$

Условимся также считать $0! = 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

- Сколькими способами можно выбрать председателя, заместителя и секретаря собрания из присутствующих 30 человек?
- Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 4, 5, 8 при условии, что три цифры в каждом числе различны?
- Сколько трехзначных чисел, образованных различными цифрами (т.е. без повторений), можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4?
- Во время загородной прогулки на привале Серьезный Петя нашел три камня весом 1 кг, 1,5 кг и 3 кг и решил незаметно подложить по одному камню в рюкзаки своим друзьям. Сколькими способами может «пошутить» Серьезный Петя, если друзей с рюкзаками шесть?

1.2. Перестановки

Перестановками из k элементов называются размещения из k элементов по k , т.е. множество, состоящее из всех данных k элементов, отличающихся только порядком расположения этих элементов. Максимальное число таких множеств называется числом перестановок из k элементов и обозначается P_k . Из определения перестановок:

$$P_k = A_k^k = k(k-1) \dots (k-(k-1)) = k(k-1) \dots 1 = k! \quad (2.4)$$

Формула: $P_k = k!$

Правило: число перестановок из k элементов равно произведению всех натуральных чисел от 1 до k .

Пример: перестановки из трех элементов a, b и c :
 $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

Как видим, $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

УПРАЖНЕНИЯ

1. В актовом зале за столом президиума 4 стула. Сколькими способами можно рассадить четырех человек, избранных в президиум?
2. Сколькими способами Толстый Вася может съесть четыре разные пиццы и шесть разных пирожных, если сначала нужно съесть все пиццы. (Под способом подразумевается порядок поедания.)
3. За круглым столом на именинах у Ани рассаживаются семеро гостей. 1) Сколькими способами можно рассадить гостей? 2) Сколькими способами можно рассадить гостей так, чтобы рядом с Аней сидел Ваня? (Имена всех гостей разные, места за столом равноценные.)
4. Сколькими способами в предыдущей задаче можно рассадить гостей так, чтобы 1) Ваня сидел напротив Ани; 2) чтобы Ваня сидел с рядом Аней, а напротив Ани сидела бы Таня?

п. 3. Сочетания

Сочетаниями из n элементов по k элементов ($n \geq k$) называются всевозможные неупорядоченные подмножества по k элементов, взятые из данных n элементов. Порядок элементов в каждом подмножестве значения не имеет, но подмножества должны отличаться хотя бы одним элементом. Максимальное число таких подмножеств обозначается C_n^k (читается «си из эн по ка») и называется **числом сочетаний из n элементов по k** .

Например, выпишем всевозможные сочетания по три элемента из пяти элементов a, b, c, d, e :

$abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde$.

Получили всего 10 сочетаний $C_5^3 = 10$. Связь между сочетаниями, размещениями и перестановками можно увидеть из таблицы 2.3, содержащей всевозможные размещения из пяти элементов a, b, c, d и e по три.

Таблица 2.3

$P_5^3 = 60$	строка	abc	abd	abe	acd	ace	ade	bcd	bce	bde	cde	
		acb	adb	aeb	adc	aec	aed	bdc	bec	bed	ced	
		bca	bad	bae	cad	cae	dae	cdb	cbe	cde	dce	
		bac	bda	bea	cda	cea	dea	cdb	ceb	deb	dec	
		cab	dab	eab	dac	eac	ead	dbc	ebc	ebd	ecd	
		cba	dba	eba	dca	eca	eda	dcb	ecb	edb	<td>edc</td>	edc

$C_5^3 = 10$ столбцов

Технология построения таблицы размещений такова. Строим строку всевозможных сочетаний из семи элементов по три, т.е. для каждого соединения из трех элементов выписываем всевозможные перестановки из этих элементов. Полученная таблица содержит A_{10}^3 размещений, состоящих из P_3 строк и C_7^3 столбцов, и получаем $A_7^3 = C_7^3 \cdot P_3$, откуда $C_7^3 = A_7^3 / P_3$. Вообще, справедлива формула:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \quad (2.5)$$

Используя формулы (2.2) и (2.4), получаем:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad (2.6)$$

Справедливы также формулы:

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (2.7)$$

$$\text{Например: } C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10; \quad C_5^{5-3} = C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^{k+1} \quad (2.8)$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать тождество $C_n^k = C_n^{n-k}$.
2. Доказать тождество $C_n^k + C_n^{n-k} = C_{n+1}^{k+1}$.
3. Встретились и обменялись рукопожатиями десять старых друзей. Сколько всего было сделано рукопожатий?
4. На плоскости дано 12 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Сколькими различными треугольниками можно построить с вершинами в этих точках?
5. На плоскости дано 12 точек, из которых 4 лежат на одной прямой. Кроме того, из рассматриваемых точек никакие 3 не лежат на одной прямой. 1) Сколькими различными прямыми можно провести через эти точки? 2) Сколькими различными треугольниками с вершинами в этих точках?