# Самостоятельная работа

① Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

| I в | II в |
|---|---|
| а) $y = x^2 - 1$; $y = 3$ | $y = 5 - x^2$; $y = 1$ |
| б) $y = x^2 - 4x + 4$, $y = 4 - x$ | $y = x^2 + 4x + 4$, $y = x + 4$ |

На зачёт а) или б) вычислить одну площадь!

$y' = 3x^2$
$y' = 0 \to x = 0$
$y'' = 6x$
$y''(0) = 0$
$y''(-1) = -6$
$y''(1) = 6$
$y''$ меняет знак $\to$ (0, 0) – точка перегиба.
Искомая площадь состоит из двух частей;

$$S = \int_0^2 x^3 dx + \left|\int_{-1}^0 x^3 dx\right| = \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^2 + \left|\frac{x^4}{4}\Bigg|_{-1}^0\right| = 4 + \left|0 - \frac{1}{4}\right| = 4\frac{1}{4}.$$

## Путь, пройденный телом

Пусть $S$ – путь, пройденный за время $t$ со скоростью $V$.

$$S = V \cdot t,$$

где $V = f(t)$ при неравномерном движении.

Например:

1) $V = (2t^2 + t)$ см/с. Найти путь, пройденный телом за 6 с от начала движения:

$$S = \int_0^6 (2t^2 + t)dt = \left(\frac{2}{3}t^3 + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^6 = \frac{2}{3} \cdot 6^3 + \frac{6^2}{2} =$$

$$= 144 + 18 = 162 \text{ см}.$$

2) Скорость движения тела

$$V = \left(4t - \frac{6}{t^2}\right) \text{ см/с}.$$

**Найти путь за третью секунду:**

$$S = \int_2^3 \left(4t - \frac{6}{t^2}\right)dt = \int_2^3 (4t - 6t^{-2})dt = \left(2t^2 + 6\frac{1}{t}\right)\Bigg|_2^3 =$$

$2x - 4 = 0$

$x = 2$

$y'' = 2 > 0$

$x = 2$ — точка *min*

$y(2) = -4.$

Искомая площадь ограничена сверху $OX$, снизу $y = x^2 - 4x$, слева $x = 0$, справа $x = 4$.

Так как $y < 0$, то

$$S = \left|\int_0^4 (x^2 - 4x)\,dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2\right)\Big|_0^4\right| = \left|\frac{64}{3} - 32\right| = \left|21\frac{1}{3} - 32\right| =$$

$$= \left|-10\frac{2}{3}\right| = 10\frac{2}{3}.$$

3) Найти площадь фигуры, заключенной между $y = x^3$, $x = -1$, $x = 2$ и осью $OX$ (рис. 66):


Рис. 66

$y = x^3$

$y = 0 \rightarrow x = 0;$

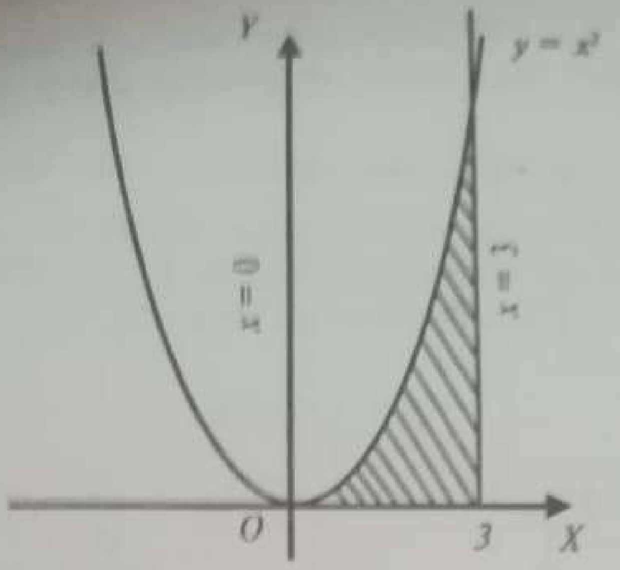


Рис. 64

$x^2 - 4x = 0$; $x(x - 4) = 0$
$x_1 = 0$; $x_2 = 4$.
Найдем производную:
$y' = 2x - 4$.
Найдем точки экстремума:
$y' = 0$;

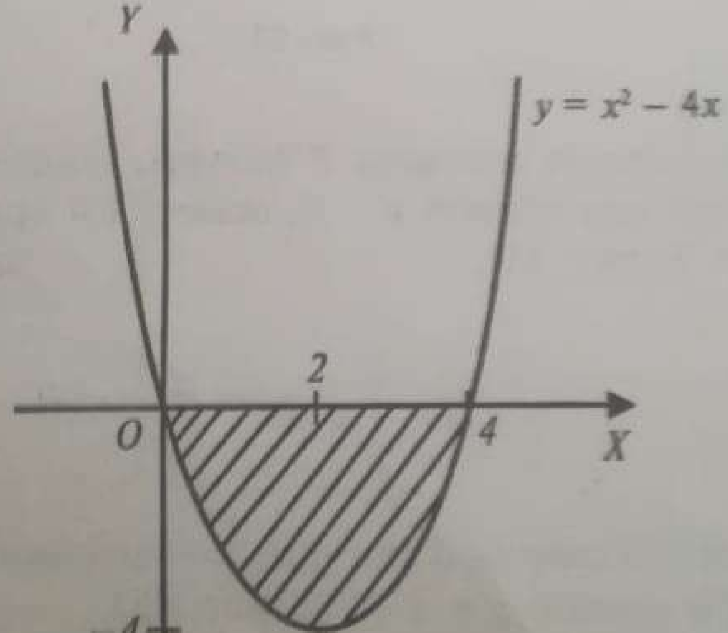


Рис. 65

## 9.9. Решение прикладных задач с помощью определенного интеграла

### Геометрический смысл определенного интеграла

Площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, где $f(x) > 0$, осью $OX$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 63), выражается определенным интегралом:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

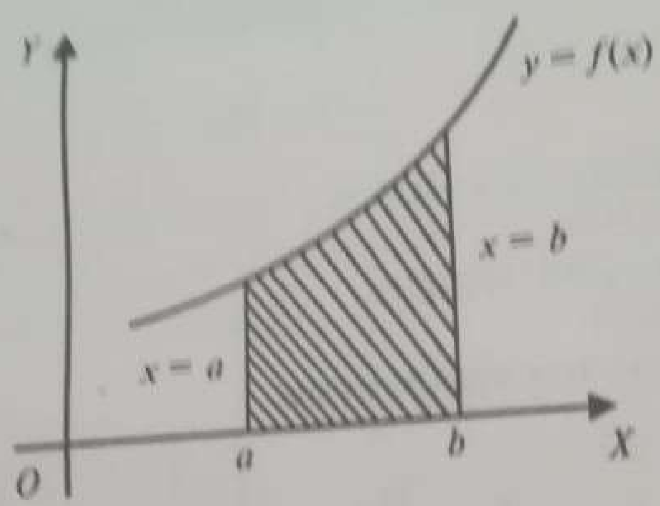


Рис. 63

**Пример:**

1) Определить площадь $S$ фигуры, заключенной между ветвью кривой $y = x^2$, осью $OX$ и прямыми $x = 0$, $x = 3$ (рис. 64).

$$S = \int_0^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = 9$$

2) Найти площадь $S$ фигуры, заключенной между осью $OX$ и кривой $y = x^2 - 4x$ (рис. 65).

Рассмотрим точки пересечения кривой $y = x^2 - 4x$ с осью $OX$:

$y = 0$