4. Среди 100 курсантов мореходного училища 75 имеют рост меньше 1 м 80 см и 25 — рост, больший или равный 1 м 80 см. Найти вероятность того, что среди трех случайно встреченных курсантов двое окажутся ниже, а один выше 1 м 80 см.

5. Вероятность того, что Толстый Ваня и Серьезный Петя оба моют руки перед обедом равна 0,32. Известно, что Ваня моет руки перед обедом с вероятностью 0,8. С какой вероятностью Петя моет руки перед обедом?

Тема 6. Совместимые события
Теоремы сложения

Суммой двух событий *A* и *B* называется событие *C*, состоящее в появлении хотя бы одного из событий *A* или *B*.

Пример: появление двойки или четверки при выбрасывании игрального кубика $C = A + B$ — символическая запись события, состоящего в том, что выпадает либо двойка (событие A), либо четверки (событие B).

Пример: A — событие, заключающееся в извлечении короля бубен из колоды. B — извлечение любого туза. $C = A + B$ — событие, состоящее в извлечении либо короля бубен, либо любого туза.

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Пример: В шляпе свернуты в трубочку лотерейные номера от 1 до 36. Выигрышными являются номера 2, 7, 29, 30, 32, 34. Пусть A_1 — извлечение № 2, A_2 — № 7; A_3 — № 29; A_4 — № 30; A_5 — № 32, A_6 — № 34. Событие $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$ состоит в извлечении из шляпы любого выигрышного номера.

Напомним, что два события называются **несовместимыми (несовместными)**, если появление одного в данном испытании (опыте) исключает появление другого, и **совместимыми (совместными)**, если появление одного не исключает появления (или не появления) другого (*см.* также тему 3).

Графическая иллюстрация

Событие *A* — попадание в любую точку зоны *A*, событие *B* — попадание в любую точку зоны *B*.

Рис. 6.1 — события *A* и *B* несовместимы.

Событию $C = A + B$ соответствуют все точки как зоны *A*, так и зоны *B*.

Рис. 6.2 — события *A* и *B* совместимы.

2-й способ: Событием, противоположным событию С, является событие $\overline{C}$ — извлечение красного шара: $P(\overline{C})=\frac{5}{18}$; искомая вероятность

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}.$$

Примечание: Задачу можно также решить третьим способом, вытекающим непосредственно из классического определения ТВ:

$$P(C)=\frac{m}{n}=\frac{6+7}{18}=\frac{13}{18}.$$

Здесь m — суммарное количество черных и желтых, n — общее число шаров в урне.

2) Слово «победа» разрезали на шесть букв, свернули каждую букву в трубочку и сложили в урну. Наугад выбирают четыре буквы. Выигрывает игрок, у которого из взятых букв можно сложить слово «обед» либо слово «беда». Какова вероятность выигрыша?

Решение: Рассмотрим событие, состоящее в извлечении четырех букв. Полная группа таких событий содержит $C_6^4=C_6^2=15$ событий. Вероятность извлечения любых четырех букв $P(A_1)=\frac{1}{15}$ (A_i — i-й набор из четырех букв). Пусть A_1 — извлечение букв о, б, е, д, A_2 — извлечение букв б, е, д, а. Оба события несовместимы (не могут появиться сразу при одном опыте). По теореме о сложении вероятностей, искомая вероятность:

$$P=P(A_1)+P(A_2)=\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{2}{15}.$$

Ответ: $\frac{2}{15}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Наугад выбираются две карточки из четырех с записанными на них цифрами 1, 2, 3, 4. Какова вероятность извлечь две карточки, сумма чисел на которых четна?

Задачу решить двумя способами: по теореме о сложении и на основе классического определения вероятности.

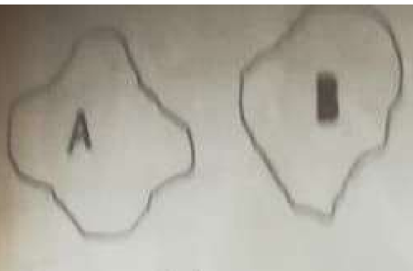

Рис. 6.1

Рис. 6.2

Теорема сложения вероятностей для несовместимых событий

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \qquad \textbf{(6.1)}$$

В частности, для противоположных событий имеем:

$P(A+\overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$ и $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Теорема сложения вероятностей для совместимых событий

Вероятность суммы двух совместимых событий равна сумме вероятностей этих событий уменьшенной на вероятность их произведения.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \qquad \textbf{(6.2)}$$

Следует заметить, что при применении теоремы умножения для совместимых событий берутся в расчет теоремы умножения из темы 5.

Примеры на использование теоремы о сложении вероятностей для несовместимых событий:

1) В урне 5 красных шаров, 6 черных и 7 желтых. Какова вероятность, что взятый наугад шар — черный или желтый?

Решение: Пусть событие A — извлечение черного шара, тогда $P(A)=\frac{5}{18}$; *пусть B — извлечение желтого шара, тогда* $P(B)=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$.

События A и B — не совместимы (не может один и тот же шар быть и черным и желтым). Пусть C — событие «извлечен черный или желтый шар», тогда C = A + B, и по теореме о сложении вероятностей

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{7}{18}+\frac{1}{3}=\frac{13}{18}.$$

Ответ: $\frac{13}{18}$.

2. В урне лежат шесть карточек с буквами п, о, б, е, д, а. Последовательно наугад вынимают четыре карточки. Выигрывает тот, у которого получится из вынутых в случайной последовательности букв либо слово «обед», либо слово «беда»?

Задачу решить двумя способами.

3. Сидя под яблоней, Ньютон составил таблицу вероятности падения спелого яблока в зависимости от даты:

Время падения	До 20 августа	От 21 до 25 августа	От 26 до 31 августа	От 1 до 5 сентября	После 5 сентября
Вероятность	0,15	0,20	0,30	0,20	0,15

Какова вероятность падения яблока 1) до 5 сентября?

2) от 21 августа до 5 сентября?

3) после 25 августа?

4. В пруду находится n лососевых рыб, из которых m — с икрой ($m < n$). Рыбаку выдана лицензия на вылов k рыб ($k < n$). Какова вероятность, что из k пойманных рыб хотя бы одна будет с икрой? Найти искомую вероятность для частного случая: $n = 1000$, $m = 500$, $k = 4$.