

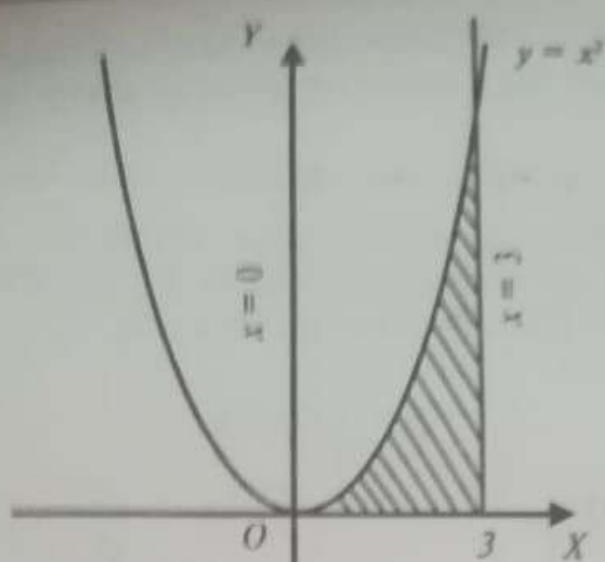


Рис. 64

$$x^2 - 4x = 0; x(x - 4) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 4.$$

Найдем производную:

$$y' = 2x - 4.$$

Найдем точки экстремума:

$$y' = 0;$$

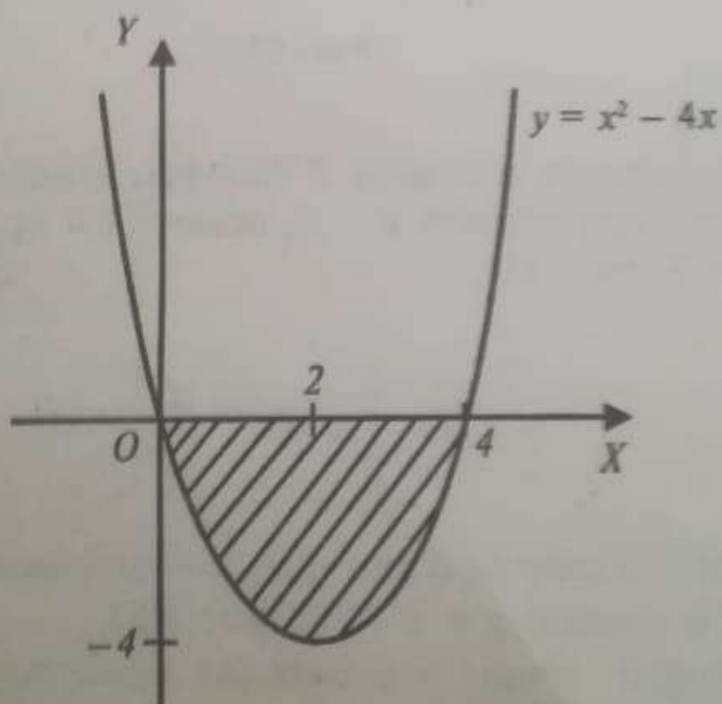


Рис. 65

$$2x - 4 = 0$$

$$x = 2$$

$$y = 2 > 0$$

$x = 2$ — точка *min*

$$y(2) = -4$$

Некая площадь ограничена сверху OX , снизу $y = x^2 - 4x$, слева $x = 0$, справа $x = 4$.
Так как $y < 0$, то

$$S = \left| \int_0^4 (x^2 - 4x) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right) \Big|_0^4 = \left| \frac{64}{3} - 32 \right| = \left| 21\frac{1}{3} - 32 \right| =$$

$$= \left| -10\frac{2}{3} \right| = 10\frac{2}{3}.$$

3) Найти площадь фигуры, заключенной между $y = x^3$, $x = -1$, $x = 2$ и осью OX (рис. 66):

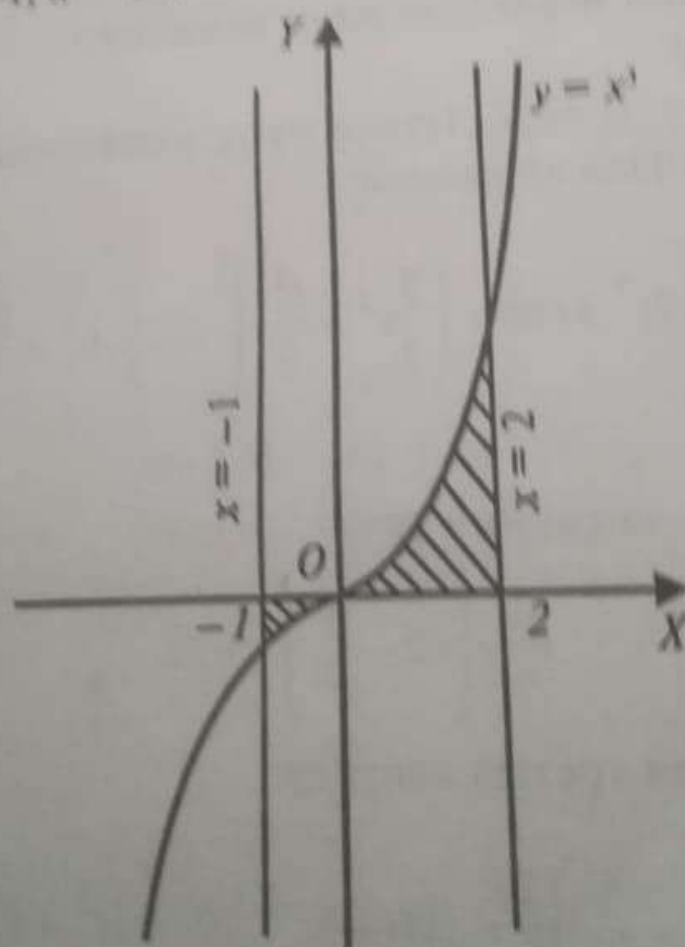


Рис. 66

$$y = x^3$$

$$y = 0 \rightarrow x = 0;$$

9.9. Решение прикладных задач с помощью определенного интеграла

Геометрический смысл определенного интеграла
Площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, где $f(x) \geq 0$, осью OX и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 63), выражается определенным интегралом:

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

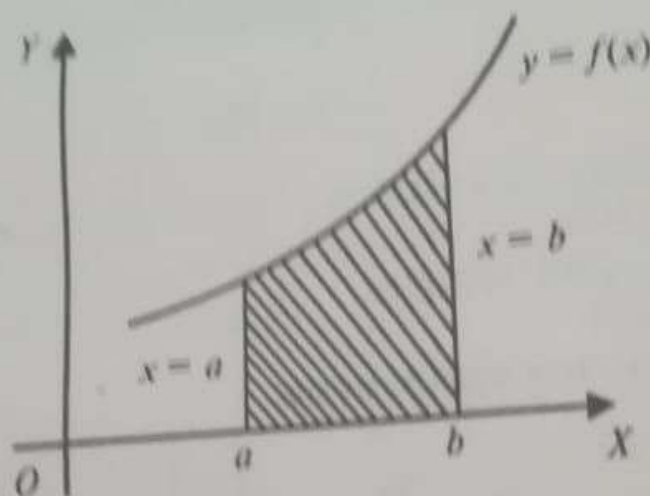


Рис. 63

Пример:

- 1) Определить площадь S фигуры, заключенной между ветвью кривой $y = x^2$, осью OX и прямыми $x = 0$, $x = 3$ (рис. 64).

$$S = \int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = 9$$

- 2) Найти площадь S фигуры, заключенной между осью OX и кривой $y = x^2 - 4x$ (рис. 65).

Рассмотрим точки пересечения кривой $y = x^2 - 4x$ с осью OX :

$$y = 0$$

$$y' = 3x^2$$

$$y' = 0 \rightarrow x = 0$$

$$y'' = 6x$$

$$y''(0) = 0$$

$$y''(-1) = -6$$

$$y''(1) = 6$$

y'' меняет знак $\rightarrow (0, 0)$ — точка перегиба.

Некая площадь состоит из двух частей;

$$S = \int_0^2 x^3 dx + \left| \int_{-1}^0 x^3 dx \right| = \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^2 + \left| \left. \frac{x^4}{4} \right|_{-1}^0 \right| = 4 + \left| 0 - \frac{1}{4} \right| = 4 \frac{1}{4}.$$

Путь, пройденный телом

Пусть S — путь, пройденный за время t со скоростью V :

$$S = V \cdot t,$$

где $V = f(t)$ при неравномерном движении.

Например:

- 1) $V = (2t^2 + t)$ см/с. Найти путь, пройденный телом за 6 с от начала движения:

$$S = \int_0^6 (2t^2 + t) dt = \left(\frac{2}{3} t^3 + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^6 = \frac{2}{3} \cdot 6^3 + \frac{6^2}{2} =$$

$$= 144 + 18 = 162 \text{ см.}$$

- 2) Скорость движения тела

$$V = \left(4t - \frac{6}{t^2} \right) \text{ см/с.}$$

Найти путь за третью секунду:

$$S = \int_2^3 \left(4t - \frac{6}{t^2} \right) dt = \int_2^3 (4t - 6t^{-2}) dt = \left(2t^2 + 6 \frac{1}{t} \right) \Big|_2^3 =$$