Ответ. $y' = 2\frac{2}{3}x^{\frac{5}{3}} + 3\frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}}$.

7.10. Производная сложной функции

Пусть дана функция $y = \lg \sin x$. Мы имеем здесь логарифмическую функцию, аргументом которой служит не независимая переменная x, а функция $\sin x$. Такого рода функции называют *сложными функциями* или *функциями от функций*.

Обозначим $\sin x$ буквой u. Тогда можно записать $y = \lg u$, где $u = \sin x$. Мы ввели вспомогательную переменную u и представили зависимость y от x как зависимость y от u, а u от x.

Аналогично, если в зависимости $y=\sqrt{1+x^2}$ мы обозначим $1+x^2$ через u, то представим и эту зависимость как зависимость y от u, а u от x.

Вообще, если

$$y=f(u),$$

где

$$u=\varphi(x),$$

то говорят, что эти функциональные зависимости определяют y как сложную функцию от x или как функцию от функции u.

Если в соотношении $y=f(u)$ заменим u через $\varphi(x)$, то получим зависимость

$$y=f[\varphi(x)].$$

Из такой записи сразу видно, что аргументом функции f является не независимая переменная x, а функция $\varphi(x)$.

Возьмем опять функцию

$$y=\sqrt{1+x^2}=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

По какому правилу можно найти производную этой функции?

Применить формулу $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$ нельзя, так как она относится к функции вида x^a, т. е. к степени, основанием которой является сам аргумент x, в то время как в функции $y = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ основанием служит функция $1+x^2$ аргумента x, т. е. функция $y = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ является степенью функции.

Таким образом, мы должны дать новое правило дифференцирования сложной функции:

Если $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то производная от y по переменной x равна производной от y по переменной u, умноженной на производную от u по переменной x,

т. е.

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

или, заменяя y'_u через $f'(u)$ и u'_x через $\varphi'(x)$, можно записать: $y'_x = f'(u) \cdot \varphi'(x)$.

Например:

Дана функция $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Решение.

Дана сложная функция $y = \sqrt{u}$, где $u = a^2 - x^2$.

Применяя правило нахождения производной сложной функции, получаем:

$$y'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} u'_x = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} (a^2 - x^2)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Приведенная здесь форма записи процесса дифференцирования весьма громоздка.

записи.

Пусть дана функция $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Ср... подкоренное выражение $a^2 - x^2$ – сложная функция от x. Заменяем «в уме» подкоренное выражение $a^2 - x^2$ через u, дифференцируем y по переменной $u = a^2 - x^2$ и умножаем на производную от u по переменной x, т. е. на $(a^2 - x^2)'$. В результате имеем:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} (a^2 - x^2)' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Здесь значок x при обозначении производной y'_x опущен. При вычислении производной функции y по переменной x мы и впредь будем писать просто y'.

Рассмотрим еще примеры:

1. $y = (1 + x^2)^5$

$y' = ((1 + x^2)^5)' = 5 \cdot (1 + x^2)^4 \cdot (1 + x^2)' = 10x \cdot (1 + x^2)^4$

2. $y = \sin^2 x$

$y' = (\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$

3. $y = (\ln x)^2$

$y' = ((\ln x)^2)' = 2\ln x \cdot (\ln x)' = \frac{2}{x} \cdot \ln x$

4. $y = 2x - \sin(2x)$

$y' = (2x - \sin 2x)' = 2 - \cos 2x \cdot (2x)' = 2 - 2\cos 2x$

5. $y = e^{x^2}$

$$y' = \left(x \cdot e^{x^2}\right)' = (x)' \cdot e^{x^2} + x \cdot \left(e^{x^2}\right)' =$$

$$= e^{x^2} + x \cdot e^{x^2} \cdot \left(x^2\right)' = e^{x^2} + x \cdot e^{x^2} \cdot 2x = e^{x^2} \cdot \left(1 + 2x^2\right)$$