Приведенное выше определение предела переменной величины (последовательности) не является достаточно общим. Оно предусматривает лишь те случаи, когда аргумент принимает целочисленные значения, возрастающие неограниченно ($n \to \infty$). Между тем изучаемые в математическом анализе функции могут быть определены на целом интервале действительной оси OX: $a < x < b$. В связи с этим общее определение предела переменной (функции) можно сформулировать так.

6.2. Предел функции

Пусть дана функция: $y = f(x)$.

Определение:

Постоянное число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для всех x, сколь угодно мало отличающихся от a, т. е. ($|x - a| < \delta$), значение функции y сколь угодно мало отличается от числа A, т.е. ($|y - A| < \varepsilon$), т. е. если при $x \to a$ выполняется условие $y \to A$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Теоремы о пределах
(правила предельного перехода)

1. $\text{Lim}\,(x \pm y) = \lim x \pm \lim y$.

Предел суммы или разности равен сумме или разности пределов.

2. $\text{Lim}\,(x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y$.

Предел произведения равен произведению пределов.

3. Lim (x / y) = lim x / lim y.

Предел отношения равен отношению пределов.

Свойства пределов

1. Lim $A = A$, если A = const.

Предел постоянной равен этой постоянной.

2. Lim $c \cdot y = c \cdot$ lim y, если c = const.

Постоянную можно вынести за знак предела.

Понятие бесконечно малой и бесконечно большой величины

Если предел функции равен нулю (lim $y = 0$), то она называется **бесконечно малой величиной.**

Если предел функции равен бесконечности (lim $y = \infty$), т.е. величине, обратной к бесконечно малой величине, то она называется **бесконечно большой величиной.**

Следовательно, выполняются равенства: $\lim \frac{1}{0} = \infty$; $\lim \frac{1}{\infty} = 0$.

Примеры:

1. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x^4+x^2+1} = \frac{3-3}{9+3+1} = \frac{0}{13} = 0;$

2. $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^3-x^2+1\right) = -1-1+1 = -1;$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3x^3+x^2-8x+10\right) = 0+0-0+10 = 10.$

Но при простой подстановке может получиться не-
еделенность типа $0 / 0$ или ∞ / ∞. В этих случаях ис-
зуются специальные методы, описываемые в следу-
х темах.

Задания для самостоятельной работы

Найти пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x+2}{x^2-1}$

Ответ. ∞.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2+x}{4x^3+x+10}$

Ответ. 0.

3. $\lim\limits_{x\to 0,1} \frac{5x+4}{1-x}$

Ответ. 5.

4. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-4x+5}{x^2+6}$

Ответ. $\frac{1}{2}$.

5. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+3)(x-2)}{x+2}$

Ответ. -6.

6. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{3}{2x-6}$

Ответ. ∞.

7. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-5x-3}{4x^2-13x+3}$

Ответ. 1.

8. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{4x^2-5x-1}{2x^2-x-1}$

Ответ. ∞.

6.3. Раскрытие неопределенности вида 0/0

Для раскрытия неопределенности такого вида необходимо предварительно дробь сократить (разложив на множители), а затем найти предел.

Например:

1. $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}} \frac{4x^2-9}{2x+3} = \lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}} \frac{(2x-3)(2x+3)}{(2x+3)} =$

$= \lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}} (2x-3) = -3-3 = -6.$

Здесь использовались для разложения формулы: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20} = \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)(x-2)}{(x-5)(x-4)} = \dfrac{3}{1} = 3$,

где необходимо было решить квадратные уравнения для разложения квадратного трехчлена на множители в числителе и в знаменателе дроби по формуле $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$:

а) $x^2 - 7x + 10 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 49 - 40 = 9$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{7 \pm 3}{2}$

$x_1 = 5,\ x_2 = 2;$

б) $x^2 - 9x + 20 = 0$

$D = 1$

$x_{1,2} = \dfrac{9 \pm 1}{2}$

$x_1 = 5,\ x_2 = 4.$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x - \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} =$

$= -\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{(\cos x - \sin x)}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} =$

$= -\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{(\sqrt{1+3x}-1)(\sqrt{1+3x}+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{1+3x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{3x} = \dfrac{2}{3}$.

Здесь, для того чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе, и числитель и знаменатель были умножены на выражение, сопряженное знаменателю, а затем знаменатель был свернут по формуле разности квадратов.

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{3}{2}$,

применили: $x^3 - c^3 = (x-c)(x^2+cx+c^2)$.

6. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}} = \lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(3-\sqrt{x})(4+\sqrt{2x-2})}{(4-\sqrt{2x-2})(4+\sqrt{2x-2})} = \lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(3-\sqrt{x})(4+\sqrt{2x-2})}{18-2x} =$

$= \lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(3-\sqrt{x})(4+\sqrt{2x-2})}{16-(2x-2)} = \lim\limits_{x\to 9}\dfrac{4+\sqrt{2x-2}}{2(3+\sqrt{x})} = \dfrac{2}{3}$.

$= \lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(3-\sqrt{x})(4+\sqrt{2x-2})}{2(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to 9}\dfrac{4+\sqrt{2x-2}}{2(3+\sqrt{x})}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2(x+3)-(x+3)}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+3)(x^2-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+3)(x-1)(x+1)}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1}(x+3)(x+1) = 8$.

8. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6}{x^2-9} - \dfrac{1}{x-3}\right) = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6-(x+3)}{(x-3)(x+3)} =$