2) Данная система уравнений содержит одно показательное и одно линейное уравнение. Выразив из второго уравнения одну переменную через вторую и подставив это выражение в первое уравнение системы, мы получим квадратное уравнение относительно новой переменной.

$$\begin{cases} 2^x - 2^y = 16, \\ x + y = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^{9-y} - 2^y = 16, \\ x = 9 - y; \end{cases} \quad \frac{2^9}{2^y} - 2^y - 16 = 0.$$

$$2^y = z, \ \frac{512}{z} - z - 16 = 0, \quad 512 - z^2 - 16z = 0,$$

$$z^2 + 16z - 512 = 0, \ z_1 = 16, \ z_2 = -32;$$

$2^{y_1} = 16$, $2^{y_2} = -32$ – решений нет.

$y = 4, x = 5;$

О т в е т: (5; 4).

3) Данная система уравнений решается аналогично 1).

$$\begin{cases} \left(\sqrt{5}\right)^{x-y} = 25, \\ 6^{6y-x-1} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 5^{\frac{x-y}{2}} = 5^2 \\ 6^{6y-x-1} = 6^0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = 2, \\ 6y - x - 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 4, \\ -x + 6y = 1; \end{cases}$$

$5y = 5, y = 1, x = 5.$

О т в е т: (5; 1).

4) Данная система уравнений решается аналогично 2) с тем лишь отличием, что мы получим в итоге не квадратное уравнение относительно показательной переменной, а линейное.

$$\begin{cases} 3^x + 3^y = 28, \\ x - y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 3^{3+y} + 3^y = 28, \\ x = 3 + y; \end{cases} \quad 27 \cdot 3^y + 3^y = 28, \ 28 \cdot 3^y = 28$$

$y = 0, x = 3.$

О т в е т: (3; 0).

Пример 4. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 1, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5, \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_2(x+1) = \log_2\left(y + \dfrac{1}{4}\right), \\ \log_2 x - 2\log_2\left(y - \dfrac{1}{2}\right) = 0; \end{cases}$

Решение:

1) Данная система уравнений содержит два логарифмических уравнения. Она решается методом введения новых переменных, в результате чего мы получим квадратную систему уравнений.

$$\begin{cases} \lg x - \lg y = 1, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5. \end{cases} \quad \lg x = u,\ \lg y = v, \quad \begin{cases} u - v = 1, \\ u^2 + v^2 = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 1 + v, \\ (1+v)^2 + v^2 = 5; \end{cases} \quad 1 + 2v + v^2 + v^2 = 5,\ 2v^2 + 2v - 4 = 0,$$

$$v^2 + v - 2 = 0,\ v_1 = -2,\ v_2 = 1;\ u_1 = -1,\ u_2 = 2;\ \lg x = -1,$$

$$\lg y = -2,\ \lg x = 2,\ \lg y = 1,\ x_1 = 0{,}1,\ y_1 = 0{,}01,\ x_2 = 100;\ y_2 = 10.$$

О т в е т: (0,1; 0,01); (100; 10).

2) Данная система также содержит два логарифмических уравнения. Она также сводится к квадратной системе уравнений.

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5, \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0,\ y > 0, \\ \log_2(x^2 + y^2) = \log_2 32, \\ \log_2 x + \log_2 y = \log_2 16; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0,\ y > 0, \\ x^2 + y^2 = 32, \\ xy = 16; \end{cases}$$

$$x = \frac{16}{y},\ \frac{256}{y^2} + y^2 = 32,\ y^4 - 32y^2 + 256 = 0,\ (y^2 - 16)^2 = 0,$$

$y_1 = 4, y_2 = -4, y > 0; x_1 = 4.$

О т в е т: (4; 4).

4) Данная система также содержит два тригонометрических уравнения. Для ее решения необходимо сложить оба ее уравнения и воспользоваться основным тригонометрическим тождеством.

$$\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cdot \cos y, \\ \cos^2 x = \sin x \cdot \sin y; \end{cases}$$

$1 = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y, \quad \cos(x - y) = 1,$

$x - y = 2\pi n,\ n \in Z, \quad x = 2\pi n + y,\ n \in Z; \quad \sin^2(2\pi n + y) =$

$= \cos(2\pi n + y) \cdot \cos y, n \in Z, \sin^2 y = \cos^2 y, \sin^2 y - \cos^2 y = 0,$

$tg^2 y = 1, \cos y \neq 0,\ tgy = \pm 1,\ y = \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z;$

$x = 2\pi n \pm \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

О т в е т: $\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi k + 2\pi n; \dfrac{\pi}{4} + \pi k\right),$

$\left(-\dfrac{\pi}{4} + \pi k + 2\pi n; -\dfrac{\pi}{4} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 3. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 16, \\ x + y = 9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \left(\sqrt{5}\right)^{x-y} = 25, \\ 6^{6y-x-1} = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 28, \\ x - y = 3. \end{cases}$

...ит два по