Приведенное выше определение предела переменной величины (последовательности) не является достаточно общим. Оно предусматривает лишь те случаи, когда аргумент принимает целочисленные значения, возрастающие неограниченно ($n \to \infty$). Между тем изучаемые в математическом анализе функции могут быть определены на целом интервале действительной оси OX: $a < x < b$. В связи с этим общее определение предела переменной (функции) можно сформулировать так.

6.2. Предел функции

Пусть дана функция: $y = f(x)$.

Определение:

Постоянное число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для всех x, сколь угодно мало отличающихся от a, т. е. ($|x - a| < \delta$), значение функции y сколь угодно мало отличается от числа A, т.е. ($|y - A| < \varepsilon$), т. е. если при $x \to a$ выполняется условие $y \to A$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Теоремы о пределах (правила предельного перехода)

1. $\text{Lim}\,(x \pm y) = \lim x \pm \lim y$.

Предел суммы или разности равен сумме или разности пределов.

2. $\text{Lim}\,(x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y$.

Предел произведения равен произведению пределов.

3. $\text{Lim}\,(x / y) = \lim x / \lim y$.

Предел отношения равен отношению пределов.

Свойства пределов

1. $\text{Lim}\, A = A$, если $A = \text{const}$.

Предел постоянной равен этой постоянной.

2. $\text{Lim}\, c \cdot y = c \cdot \lim y$, если $c = \text{const}$.

Постоянную можно вынести за знак предела.

Понятие бесконечно малой и бесконечно большой величины

Если предел функции равен нулю ($\lim y = 0$), то она называется бесконечно малой величиной.

Если предел функции равен бесконечности ($\lim y = \infty$), т.е. величине, обратной к бесконечно малой величине, то она называется бесконечно большой величиной.

Следовательно, выполняются равенства: $\lim \dfrac{1}{0} = \infty$; $\lim \dfrac{1}{\infty} = 0$.

Примеры:

1. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1} = \dfrac{3-3}{9+3+1} = \dfrac{0}{13} = 0;$

2. $\lim\limits_{x\to-1} (x^3-x^2+1) = -1-1+1 = -1;$

3. $\lim\limits_{x\to0} (3x^3+x^2-8x+10) = 0+0-0+10 = 10.$

Но при простой подстановке может получиться не-
еделенность типа $0 / 0$ или ∞ / ∞. В этих случаях ис-
зуются специальные методы, описываемые в следу-
х темах.

Задания для самостоятельной работы

Найти пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+2x+2}{x^2-1}$

Ответ. ∞.

2. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{3x^2+x}{4x^3+x+10}$

Ответ. 0.

3. $\lim\limits_{x\to0,1} \dfrac{5x+4}{1-x}$

Ответ. 5.

4. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^3-4x+5}{x^2+6}$

Ответ. $\dfrac{1}{2}$.

5. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{(x+3)(x-2)}{x+2}$

Ответ. -6.

6. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{3}{2x-6}$

Ответ. ∞.

7. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^2-5x-3}{4x^2-13x+3}$

Ответ. 1.

8. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{4x^2-5x-1}{2x^2-x-1}$

Ответ. ∞.

6.3. Раскрытие неопределенности вида 0/0

Для раскрытия неопределенности такого вида необходимо предварительно дробь сократить (разложив на множители), а затем найти предел.

Например:

1. $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}} \dfrac{4x^2-9}{2x+3} = \lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}} \dfrac{(2x-3)(2x+3)}{(2x+3)} =$

$= \lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}} (2x-3) = -3-3 = -6.$