

Решение систем двух линейных уравнений с двумя переменными с помощью определителя второго порядка, метод Крамера.

Система уравнений в общем виде записывается следующим образом.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Определителем второго порядка составленным из чисел a_1, b_1, a_2, b_2 называется число определенное равенством.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

a_1, b_1, a_2, b_2 - элементы определителя.

$a_1 \cdot b_2$ - главная диагональ.

$a_2 \cdot b_1$ - побочная диагональ.

Определитель второго порядка равен произведению элементов главной диагонали — (минус) произведению элементов побочной диагонали.

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

Образцу.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ 2x + 5y = 19 \end{cases} \quad (2; 3)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 18 & 4 \\ 19 & 5 \end{vmatrix} = 18 \cdot 5 - 19 \cdot 4 = 90 - 76 = 14$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 18 \\ 2 & 19 \end{vmatrix} = 3 \cdot 19 - 2 \cdot 18 = 57 - 36 = 21$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{21}{7} = 3$$

$$\begin{cases} 4x + 3y - 28 = 0 \\ 3x - 5y - 21 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 3y = 28 \\ 3x - 5y = 21 \end{cases} \quad (7; 0)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -20 - 9 = -29$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 28 & 3 \\ 21 & -5 \end{vmatrix} = 28 \cdot (-5) - 21 \cdot 3 = -140 - 63 = -203$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 4 & 28 \\ 3 & 21 \end{vmatrix} = 4 \cdot 21 - 28 \cdot 3 = 84 - 84 = 0$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-203}{-29} = 7$$

$$y = \frac{0}{-29} = 0$$

$$\begin{cases} 5x - 2y = 29 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases} \quad (5; 2)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 6 = 14$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 29 & -2 \\ 13 & 4 \end{vmatrix} = 29 \cdot 4 - 13 \cdot 2 = 116 - 26 = 90$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 5 & 29 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} = 5 \cdot 13 - 29 \cdot 3 = 65 - 87 = -22$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{90}{14} = 5$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-22}{14} = -2$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 2 \end{cases} \quad (0; 0)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -12 - (-12) = 0$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 4 = -8$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

т.е. $\frac{1}{3} = \frac{-2}{6} = \frac{-8}{-12} = \frac{2}{3}$
множество решений

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 4x - 6y = 3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 - (-12) = 0$$

$$\text{т.е. } \frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{2}{4} \neq \frac{3}{4}$$

нет решений

Если определитель равен 0, то система уравнений имеет либо бесконечное множество решений, либо не имеет решений.

Если коэффициенты пропорциональны $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$, то система имеет бесконечное множество решений. Если коэффициенты хотя бы один не пропорциональны, то система не имеет решений, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.